

# 気象情報解析論第1回

フーリエ級数

神山 翼, @t\_kohyama,  
[tsubasa@is.ocha.ac.jp](mailto:tsubasa@is.ocha.ac.jp),

理3-703

# 今日は周期関数を三角関数の重ね合わせ で表現する方法を学びます

## フーリエ級数

色々な周期の三角関数をうまく足し合わせると  
さまざまな周期関数を近似することができる

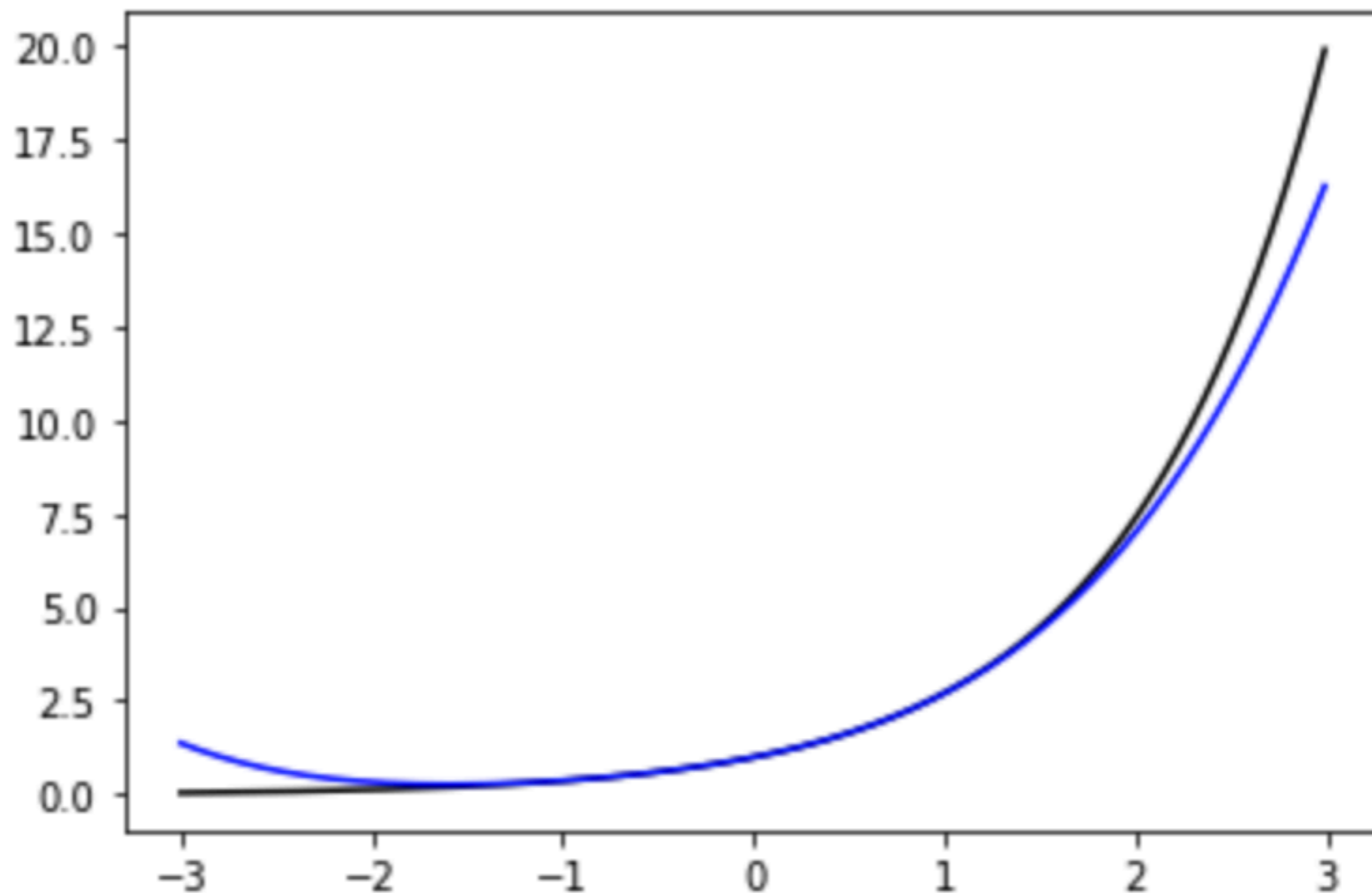
どの周期（周波数）がいっぱい足されているか  
を表した図をパワースペクトルという

時系列データには色んな周波数のパワーが  
含まれていることを想像できるようにするのが目標

# マクローリン級数

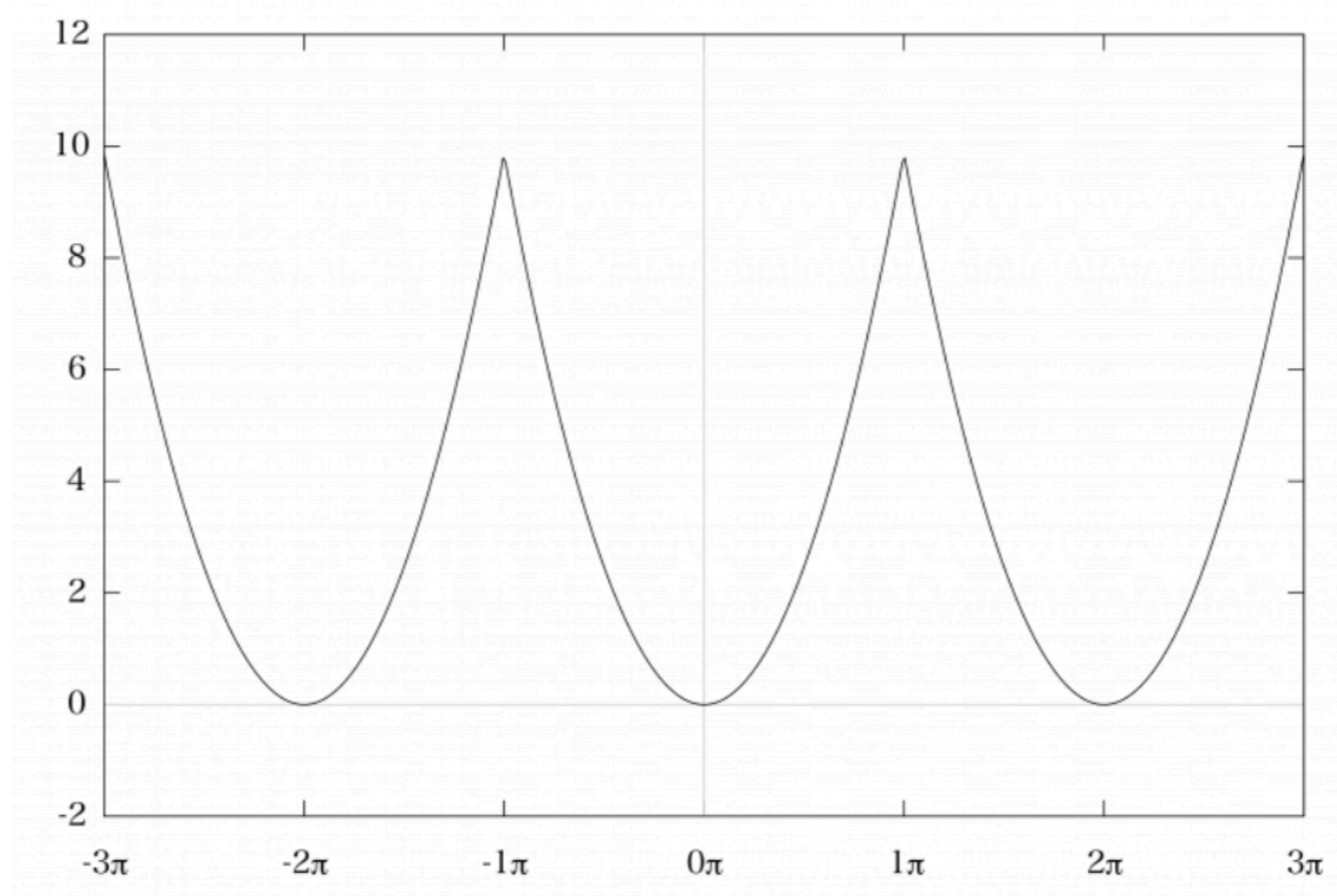
例：指数関数を多項式でフィッティング

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$



# フーリエ級数

例：放物線を繰り返すような周期関数



$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 4x + \dots$$

## マクローリン級数

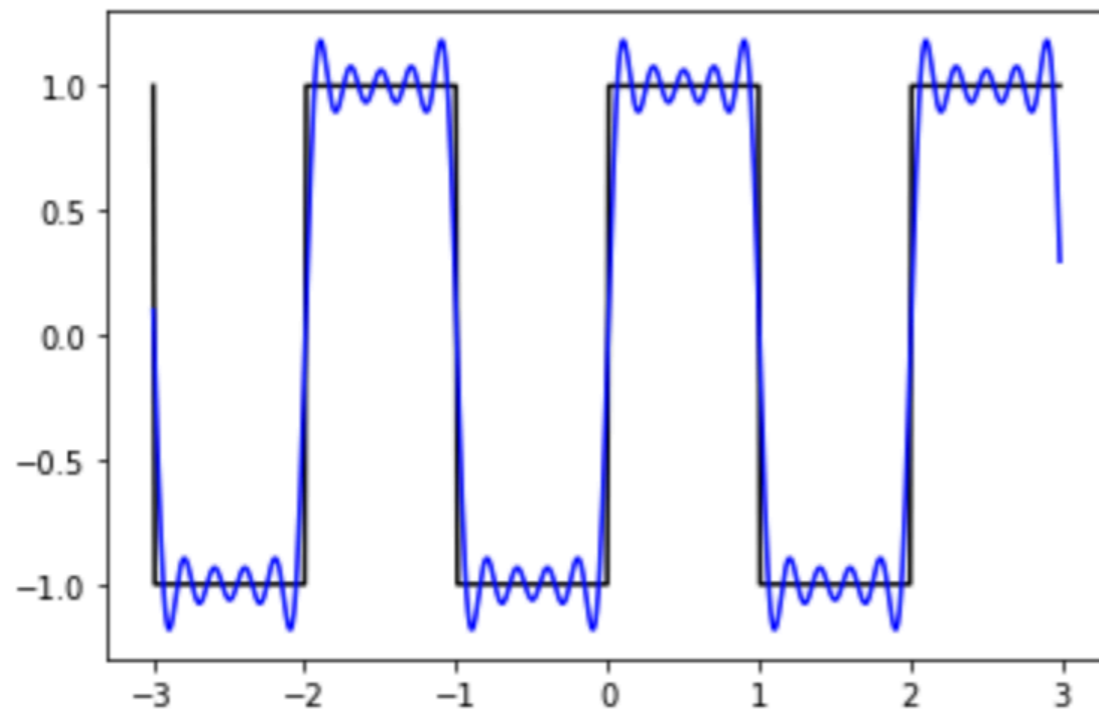
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

## フーリエ級数

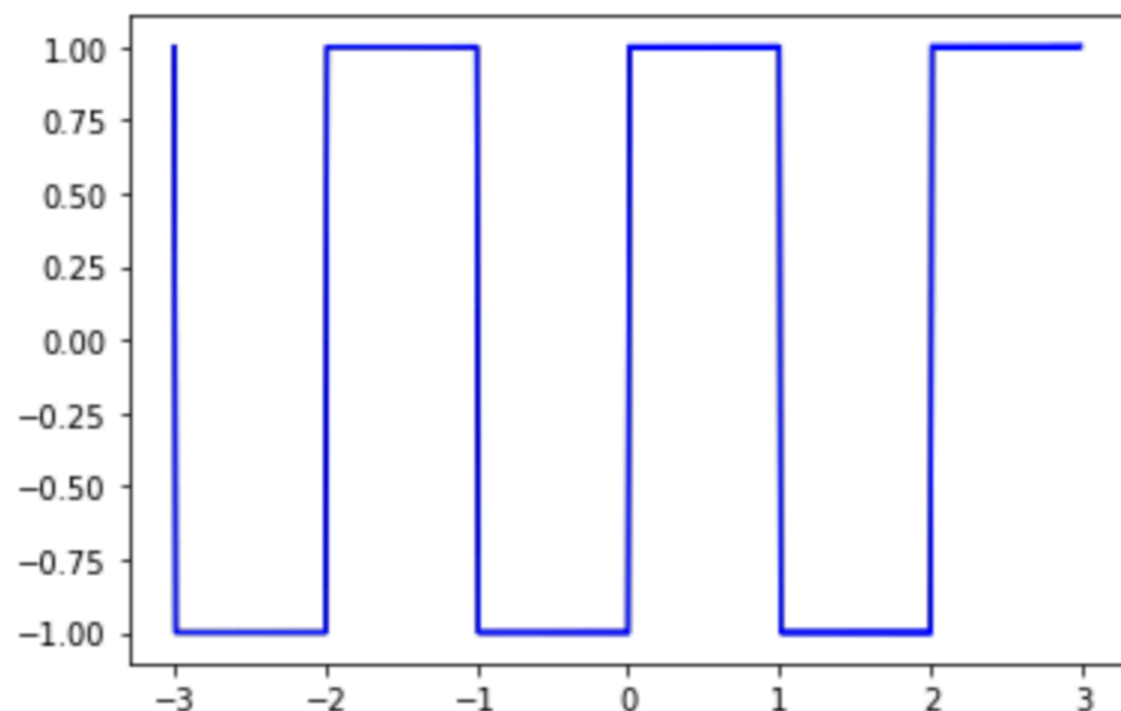
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 4x + \dots$$

多項式ではなく三角関数を重ねるようになるだけ  
だと思えば、まず気が楽ですかね

# 結構ちゃんと近似してくれます



第10項目まで



第100項目まで

どうやってやるの？

マクローリンのときと同様に

フーリエにも係数を求める公式があります

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \left\{ a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} + \left\{ a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right\} + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

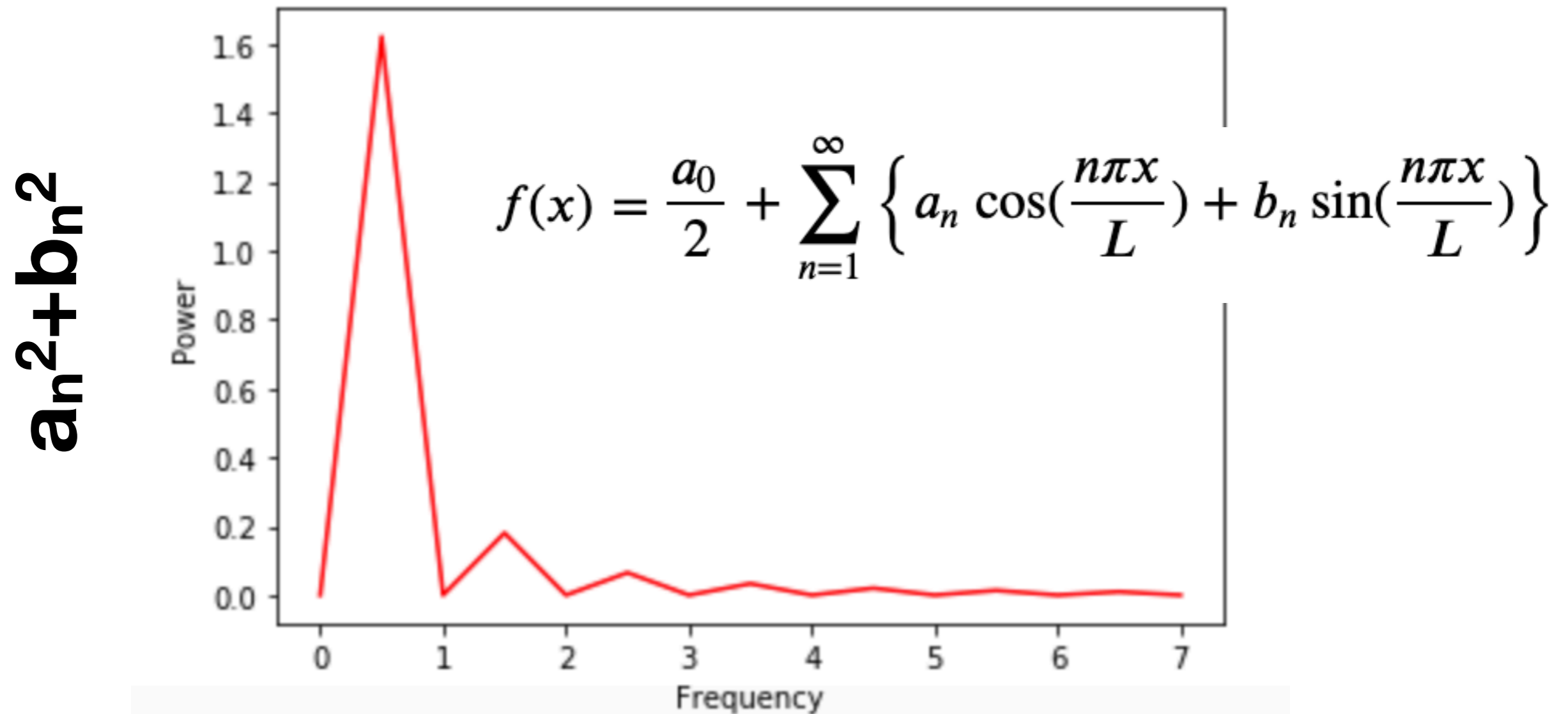
$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

とはいえデータ解析的には、要は

**sinやcosに対する回帰係数**を求めるだけです



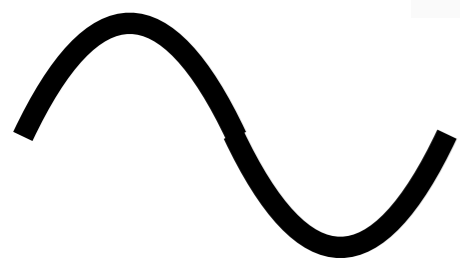
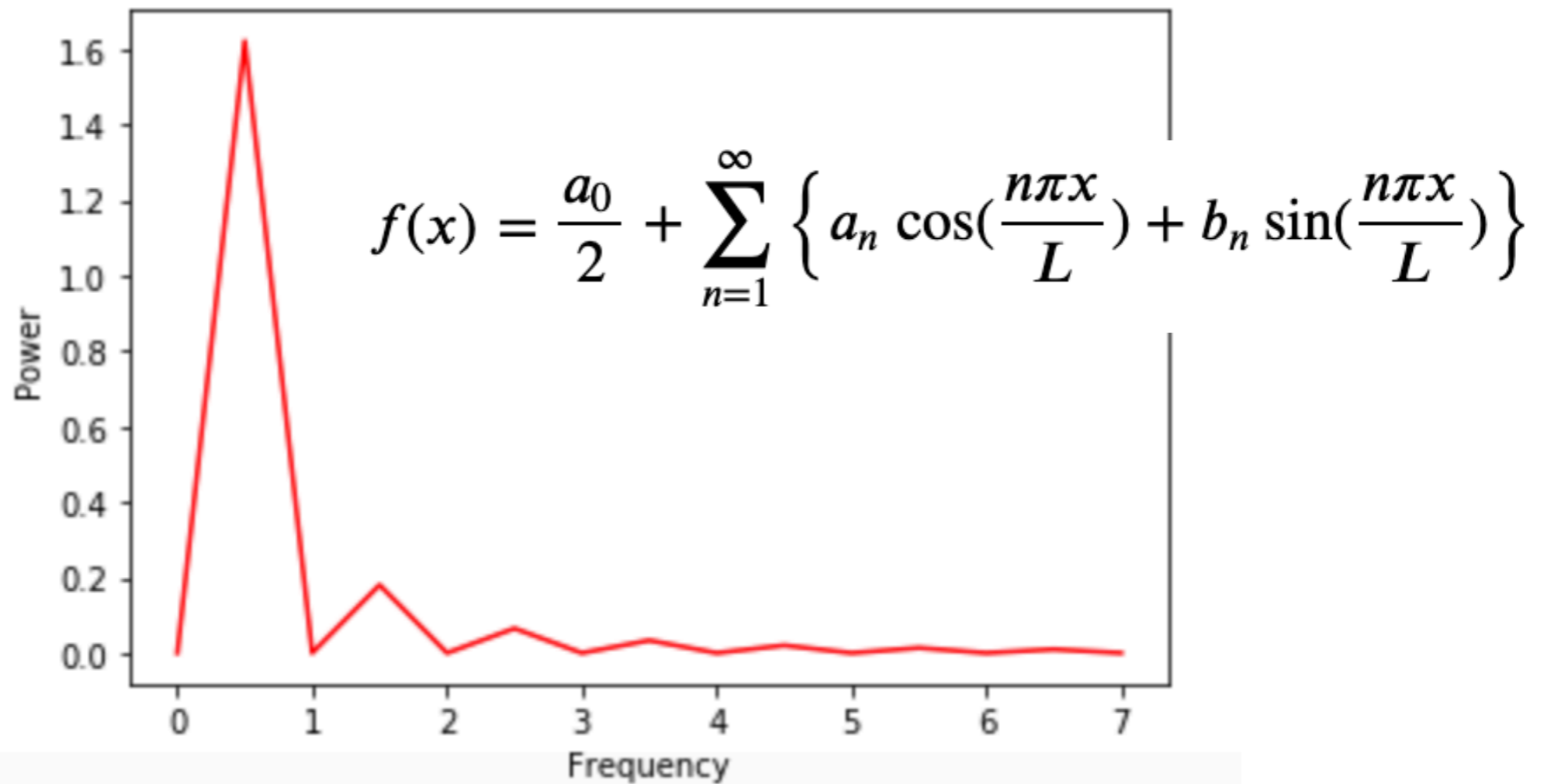
それぞれの周波数 (=周期の逆数) の三角関数について  
その振幅の2乗( $a_n^2+b_n^2 =$  「パワー」 といいいます)  
を並べた関数を**パワースペクトル**といいいます



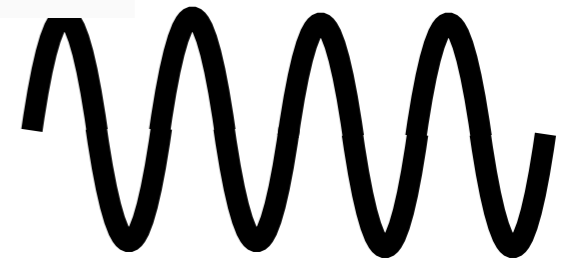
**周波数( $n/2L$ )**

# パワースペクトルの読み方

$a_n^2 + b_n^2$



周波数( $n/2L$ )



ゆったりした波

バタバタした波

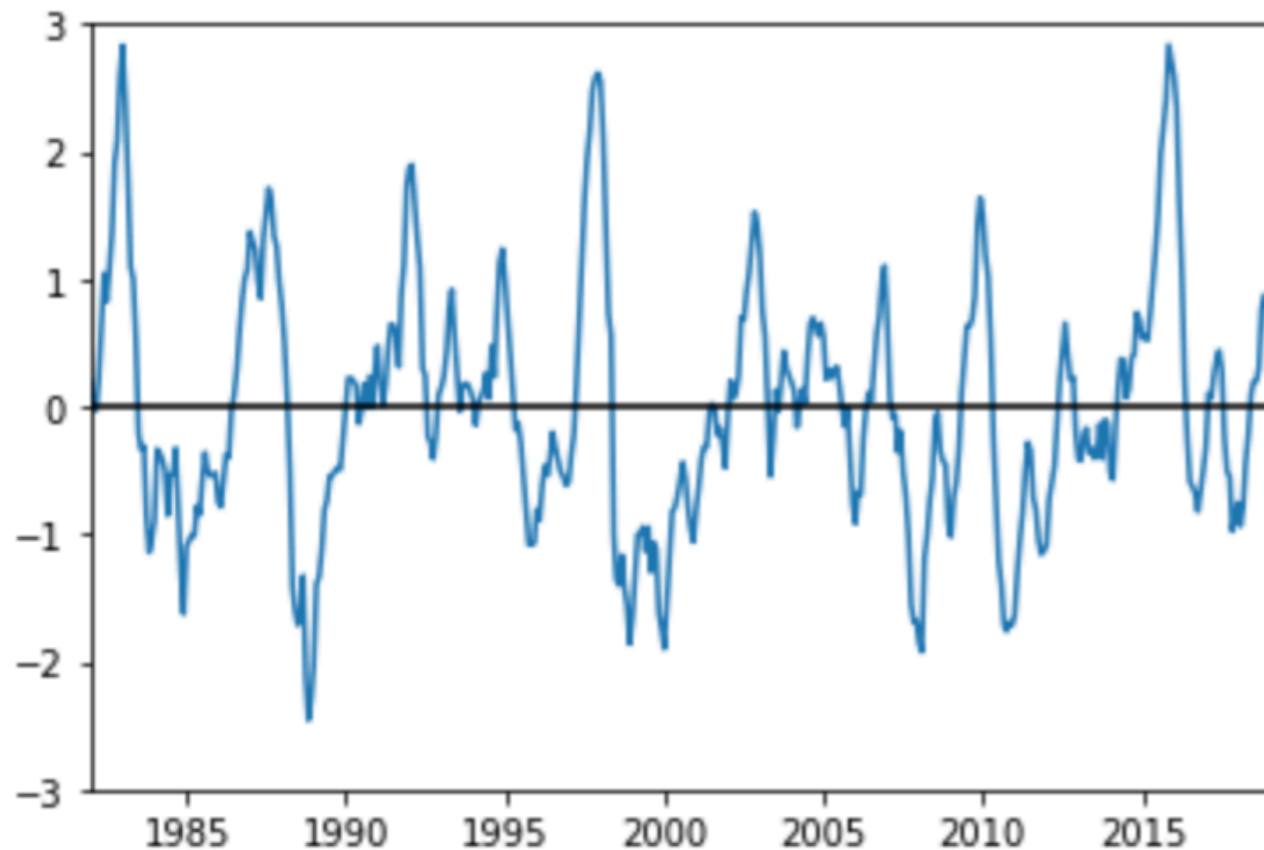
がそれぞれどれだけ含まれているかを表す

なんでそんなことするの？

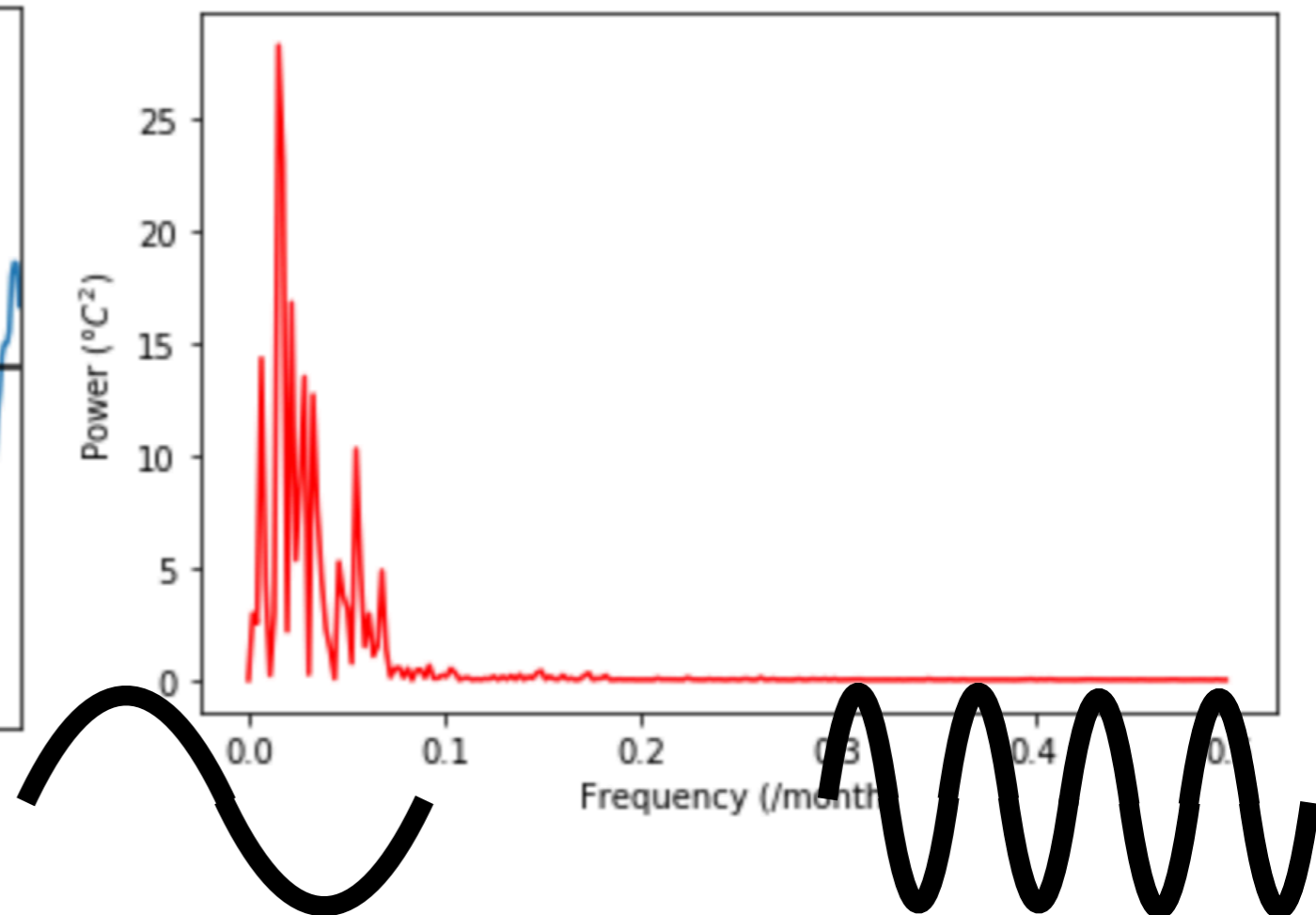
# 次回は気象に関する時系列データの パワースペクトルを求めます (乞うご期待)

例：Niño 3.4指数

時系列



パワースペクトル



## たのしい課題たち

A: フーリエ級数の項数を増やすとどうなるか

B: 矩形波のフーリエ級数を手計算で求める

C: 三角波でフーリエ級数をPythonで求める

D: 三角波のフーリエ級数を手計算で求める

# 今日は周期関数を三角関数の重ね合わせ で表現する方法を学びます

## フーリエ級数

色々な周期の三角関数をうまく足し合わせると  
さまざまな周期関数を近似することができる

どの周期（周波数）がいっぱい足されているか  
を表した図をパワースペクトルという

時系列データには色々な周波数のパワーが  
含まれていることを想像できるようになるのが目標

本日の導入パートは以上です。  
何でも良いので渡した紙に  
授業に関係のあるコメントを  
してください（出席代わり）。

コメント拾いが終わったら、  
早速今日のプログラミングに進みましょう。